Ecole Nationale des Sciences Appliquées

Année universitaire 2010-2011

Semestre 4

Examen Analyse Numérique

(Durée 1h30)

Exercice 1 On considère l'équation différentielle (E) $y' = f(t,y)$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Pour la résolution de (E) on considère le schéma

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i, h) \tag{1}$$

où ϕ est une fonction définie de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times [0, h]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour le schéma (1), rappeler les définitions de: Stabilité, consistante et de convergence, d'ordre p.
2. Que devient l'application ϕ dans le cas du schéma d'Euler explicite un pas?
3. Le schéma d'Euler explicite un pas est-il: stable? consistant? convergent ?
   (Justifer vos réponses.)
4. (a) On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $t, y \in \mathbb{R}$

   $$\left| \frac{\partial \phi}{\partial y}(t,y) \right| \leq C$$

   Montrer que schéma (1) est stable.

   (b) En déduire que si la solution y de (E) est bornée, alors le schéma d'Euler ~~(1)~~ est stable.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle (E) $y' = f(t,y)$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour la résolution de (E) on considère la méthode du point milieu explicite :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right), \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

1. Etudier la stabilité et la consistance de la méthode du point milieu.
2. En déduire que cette méthode converge.
3. On veut justifier que la méthode du point milieu est d'ordre 2. Pour cela on calcule l'erreur de consistance $e_n = z(t_{n+1}) - y_{n+1}$, où z est la solution exacte sur $[t_n, t_{n+1}]$ de (E) telle que $z(t_n) = y_n$.

   (a) Montrer que e_n s'écrit $e_n = \varepsilon_n + \varepsilon'_n$ avec

   $$\varepsilon_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n z'(t_n + h_n/2)$$

   $$\varepsilon'_n = h_n\Big[f(t_n + h_n/2, z(t_n + h_n/2)) - f(t_n + h_n/2, y_{n+1/2})\Big]$$

   (b) Montrer que $\varepsilon_n = \frac{h_n^3}{24} + o(h_n^3)$ puis calculer de façon analogue ε' et conclure.

Année universitaire 2010-2011

Semestre 3

Contrôle de rattrapage: Analyse
(Durée 1h)

Le test consiste à faire un et un seul des trois éxercices au choix.

Exercice 1 On donne les valeurs numériques suivantes d'une fonction f:

x_j	$f(x_j)$
1	0
1.5	-1
2	2
2.5	1

Table 1 Valeurs de l'application f

1. En utilisant la forme de Newton, déterminer le polynôme P qui interpole la fonction $x \mapsto f(x)$ aux points $1, 1.5, 2, 2.5$.
2. Donner l'expression générale de l'erreur d'interpolation de f aux points $1, 1.5, 2, 2.5$.
3. Calculer une valeur approchée de $f(2.3)$.
4. On suppose que f est de classe C^4 et que $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 1$ pour tout $x \in [1, 2.5]$. Quelle précision

2.5	1

Table 1 Valeurs de l'application f

1. En utilisant la forme de Newton, déterminer le polynôme P qui interpole la fonction $x \mapsto f(x)$ aux points $1, 1.5, 2, 2.5$.
2. Donner l'expression générale de l'erreur d'interpolation de f aux points $1, 1.5, 2, 2.5$.
3. Calculer une valeur approchée de $f(2.3)$.
4. On suppose que f est de classe C^4 est que $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 1$ pour tout $x \in [1, 2.5]$. Quelle précision obtient-on dans le calcul de $f(2.3)$?

   (Justifier vos réponses.)

Exercice 2 On considère une fonction f de classe C^2 sur $[a, b]$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et

$$0 < m \leq |f'(x)| \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M$$

pour tout $x \in [a, b]$ où réels M et m deux réels.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a, b]$, qu'on notera α.

   Dans la suite, on pose

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x \in [a, b].$$

2. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour f entre α et x_p et montrer que pour tout $x_0 \in [\alpha - r, \alpha + r]$, la suite itérée (x_p) définie par $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers α et que

$$|x_{p+1} - \alpha| \leq \frac{M}{2m} |x_p - \alpha|^2, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

3. En déduire que (On démontre par reccurence que :

$$|x_p - \alpha| \leq \frac{2m}{M} \left(\frac{M}{2m} |x_0 - \alpha| \right)^{2^p}, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

4. **Application**:

   En utilisant la méthode de Newton, donner une valeur de $p \in \mathbb{N}$ pour laquelle on ait $|x_p - \alpha| \leq 10^{-8}$ où α est la racine de l'équation

$$x^3 + x - 1 = 0$$

   sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 3 Soit l'équation différentielle $(E) : y'(t) = y(t) + t$ à condition initiale $y(0) = 1$.

1. Donner le schéma d'Euler pour (E).
2. Approcher la solution de (E) à l'aide de la méthode d'Euler en subdivisant l'intervalle de travail en 10 parties égales et donner une valeur approchée de $y(0.3)$.
3. Chercher la solution exacte de (E) et comparer avec la valeur approchée.